

Lovely! Sunshine!!

科普小讲堂

四鸭分池问题



千歌酱！曜酱！大……大事不好了！



怎么了？露比酱？



露比酱，有话慢慢说。



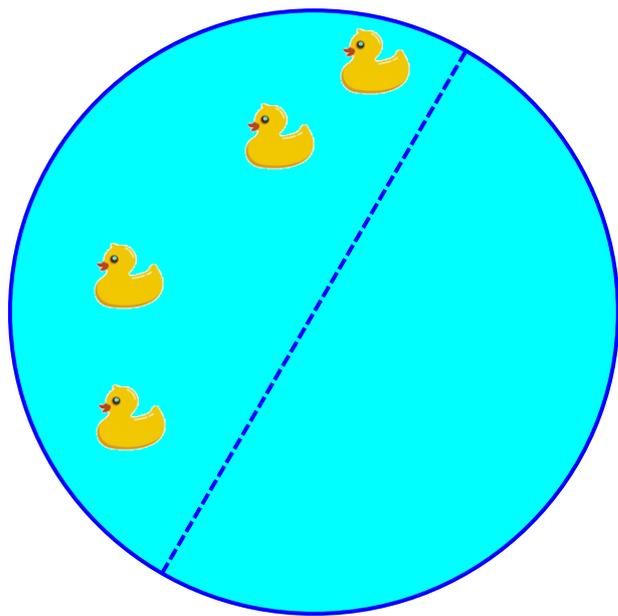
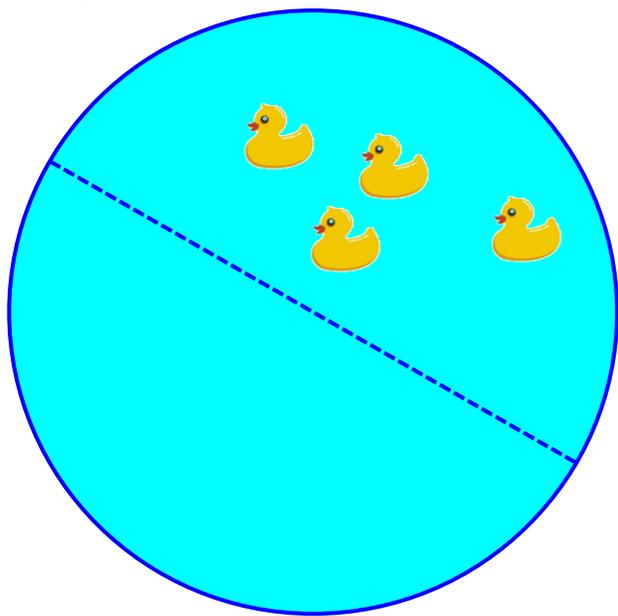
姐……姐……姐姐酱跟果南酱和鞠莉酱她们从今天早上就开始争论一个问题，争得谁也不肯让谁，都快打起来了！露比……露比该怎么办啊？



好厉害！是什么问题啊？能让她们争论到那种程度。



问题是这样的，在一个圆形的水池里有四只小鸭子，这四只鸭子可以分别随机出现在水池里的任意一点，那么请问四只鸭子出现在同一个半圆内的概率是多少？





这个概率应该是1/8吧？把水池分成左右两个半圆，四只鸭子全在左边的情况有 $C_4^4 = 1$ 种，全在右边也一样，而总共有 $2^4 = 16$ 种，所以算下来应该是1/8。



嗯，果南酱也是这么想的，可是鞠莉酱说她说得不对，鞠莉酱认为应该把水池均匀分成四个扇区，第二只、第三只、第四只鸭子均与第一只鸭子在相同或相邻扇区，那么它们就能在同一个半圆内，这样算下来概率应该是 $(3/4)^3 = 27/64$ 。



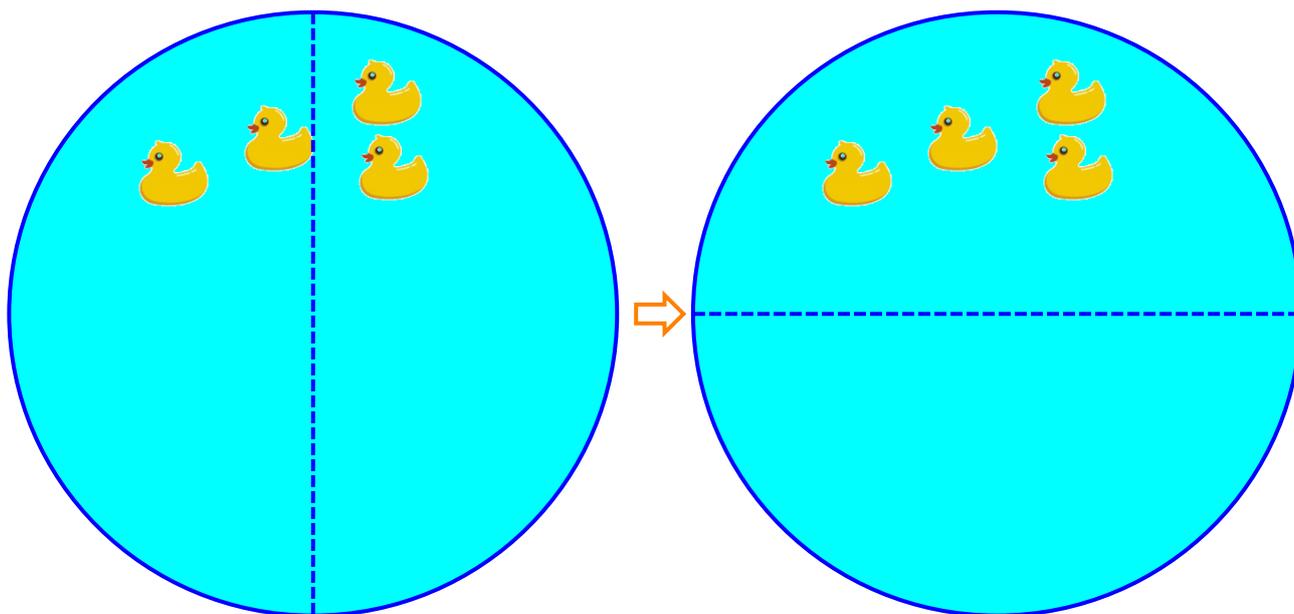
那黛雅酱是怎么想的呢？



姐姐酱说她们俩的结果都不对，因为她用matlab数值模拟出来的概率似乎是1/2，但是她自己也想不出来什么好的思路，这样果南酱和鞠莉酱当然也就不服她了，还怀疑她的程序编得有问题。千歌酱，你有什么思路么？



嗯，确实果南酱和鞠莉酱的思路都不对，当然，曜酱和果南酱一样，当然也不对咯！为什么呢？我们先来分析一下曜酱和果南酱的思路哪里不对，因为你们只考虑了左右两个半圆，事实上，当小鸭子如果全部聚集在水池上面时，即使它们分居左右两个半圆里，它们也可以同处上半部分的同一个半圆里的，半圆是可以任意划分的！



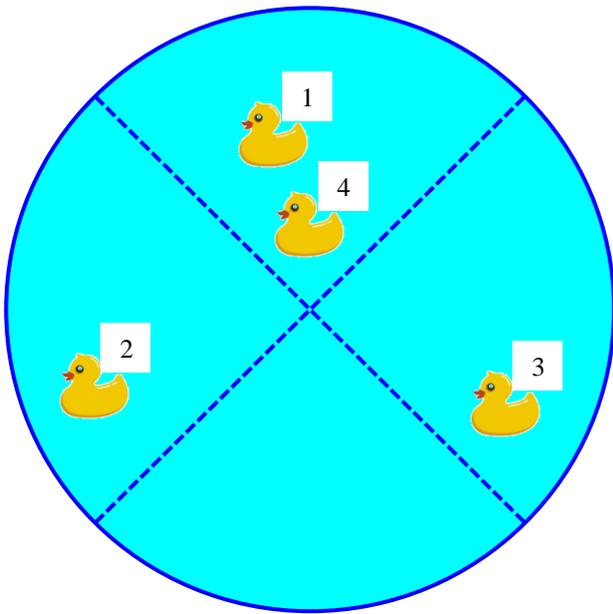
调整一下半圆划分的标准，就有可能使原先并不在同一半圆内的四只鸭子处在同一半圆内了



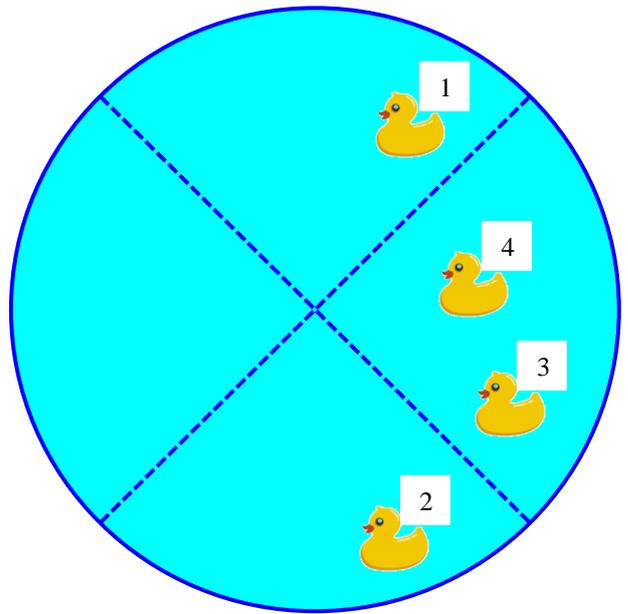
哦，好像是这样哈！那么鞠莉酱的思路又哪里不对呢？



鞠莉酱的思路看起来比曜酱和果南酱的严谨了许多，但是同样是漏洞百出的。如果第二只鸭子在第一只鸭子左边的扇区里，而第三只鸭子在第一只鸭子右边的扇区里，那么它们就完全可能并不在同一个半圆里了。同样的道理，如果有一只鸭子和第一只鸭子处在相对的扇区里，它们也完全可以在同一个半圆里。



2、3、4均与1在相同或相邻扇区中，但四只鸭子显然并不在同一半圆内



2与1处于相对的扇区中，但四只鸭子显然在同一半圆内



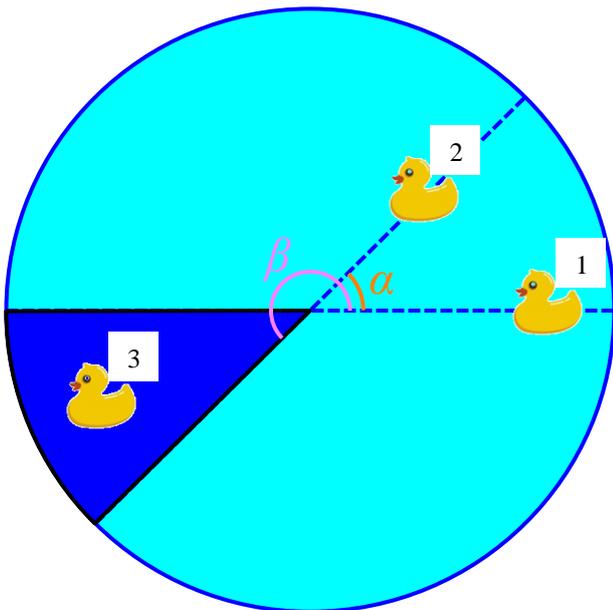
所以到底怎样的思路才是正确的呢？我们先从简单的分析起，先假设如果水池里只有两只鸭子，那么它们处于同一半圆内的概率一定是100%。在此基础上，我们加入第三只鸭子，那么请问曜酱，这第三只鸭子位置会有哪些限制呢？



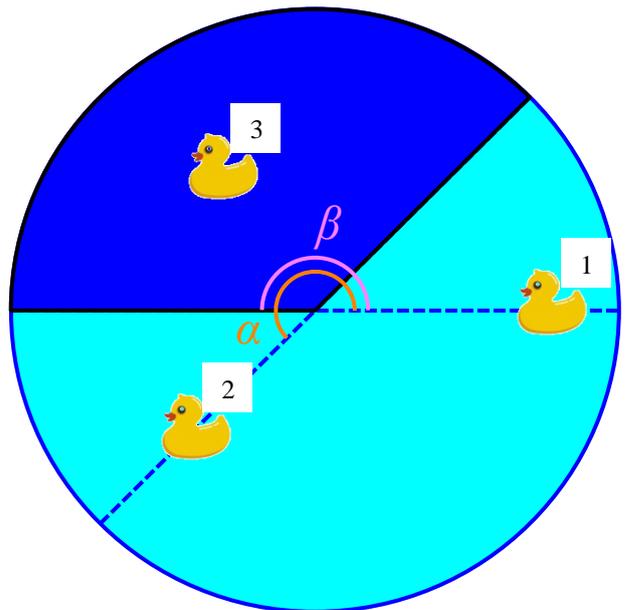
嗯，这样的话，第三只鸭子应该就不能出现在以第一只、第二只鸭子为边界的扇区相对的扇区里了。



回答正确，曜酱！于是我们以这样的思路进行分析，先固定第一只鸭子，设第二只鸭子与第一只鸭子间的圆心角为 α ，第三只鸭子与第一只鸭子间的圆心角为 β ，并且这个圆心角只沿一个方向算，比如我们沿传统的逆时针方向算，则 α 与 β 的取值范围均为 $[0, 2\pi]$ 。由于几何概型中边界的开闭与否并不影响概率值，所以边界具体是开还是闭我们就不用在意了。这样，当 α 取定时， β 的取值就会受到如下限制。



当 $\alpha \in [0, \pi]$ 时， $\beta \notin [\pi, \pi + \alpha]$

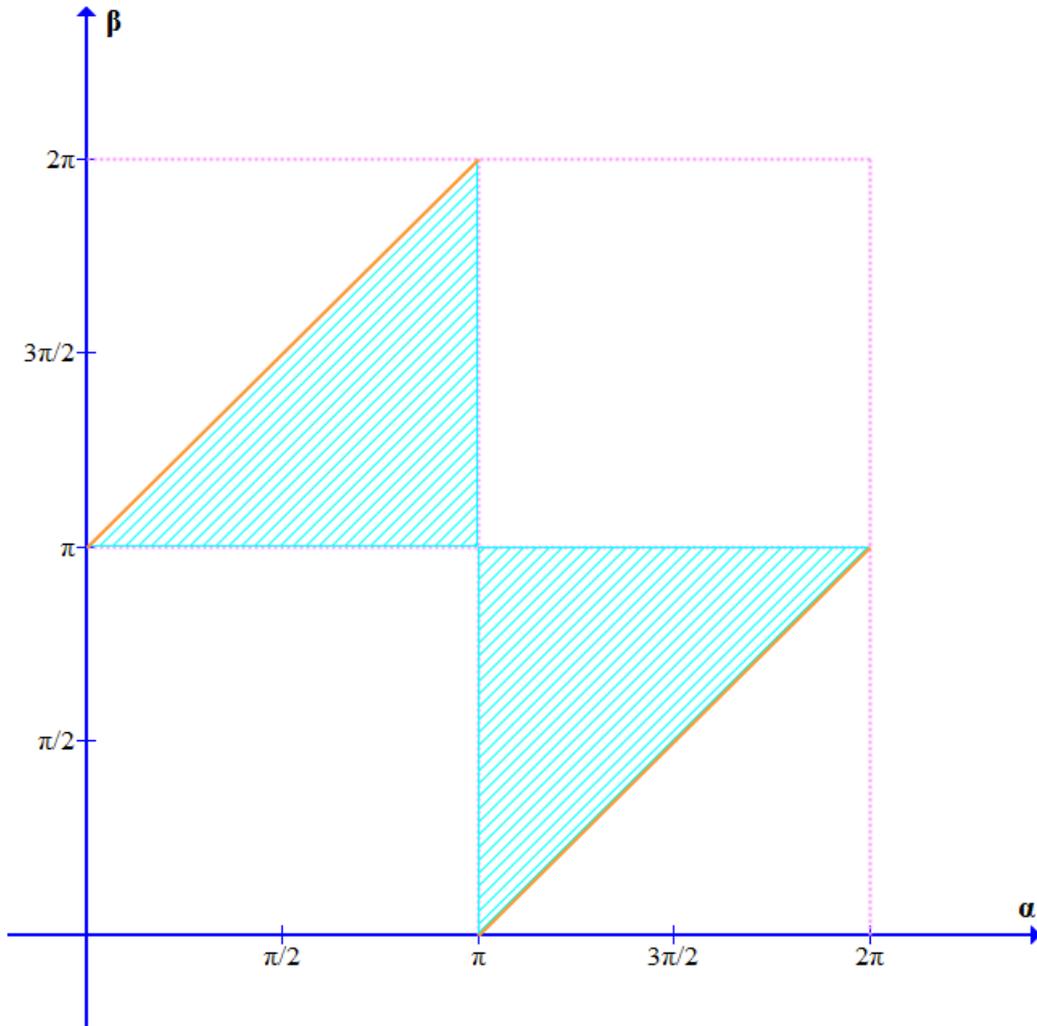


当 $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ 时， $\beta \notin [\alpha - \pi, \pi]$

当第三只鸭子处在图示范围内时，三只鸭子不处于同一半圆内



于是根据 α 与 β 间取值的限制，我们即可绘制出这样一个二维几何概型图。其中，阴影部分代表的是 α 与 β 不能取到的范围。



哦，这么一画，就一目了然了。整个正方形区域，也就是 α 与 β 一共取值范围的面积是 $4\pi^2$ ，而能导致三只鸭子不在同一半圆内的阴影部分的两个三角形的总面积只有 π^2 ，所以三只鸭子不在同一半圆内的概率就是 $1/4$ ，相应的，三只鸭子在同一半圆内的概率就是 $3/4$ 咯！



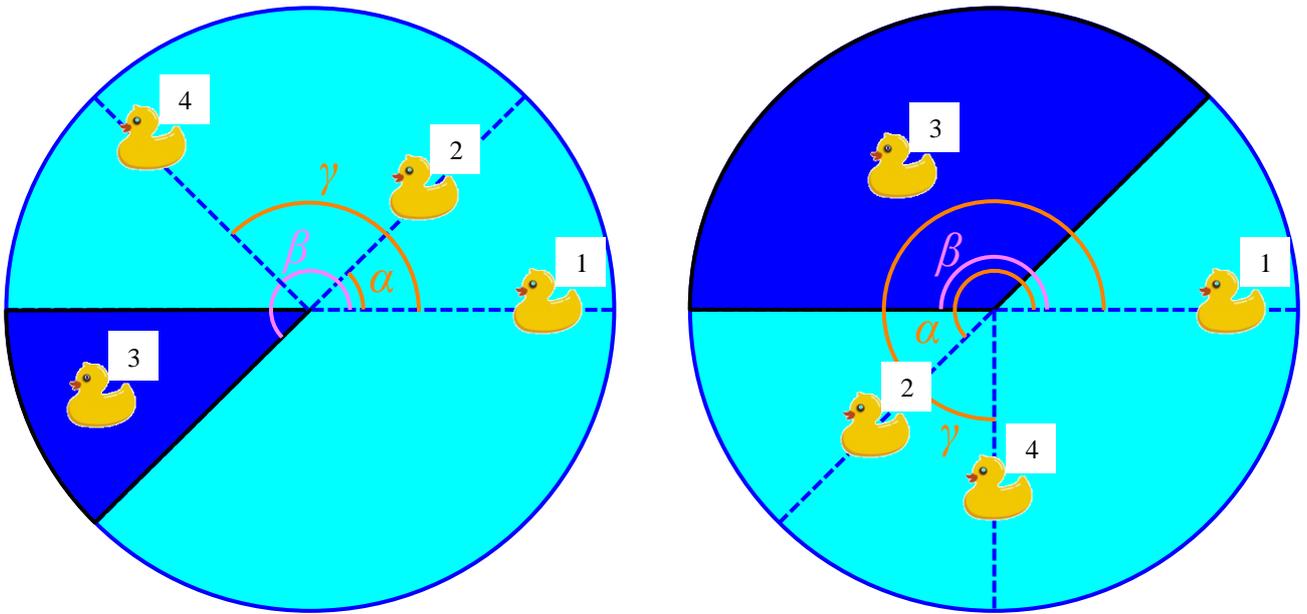
千歌酱真厉害呢，原来是这样转化为二维几何概型的问题呢！那么四只鸭子的情况就可以依此类推了，我们需要加入第四只鸭子与第一只鸭子的夹角 γ ，把它变成三维几何概型的问题吧！



但是加入第四只鸭子之后，感觉情况变得更复杂了呢！



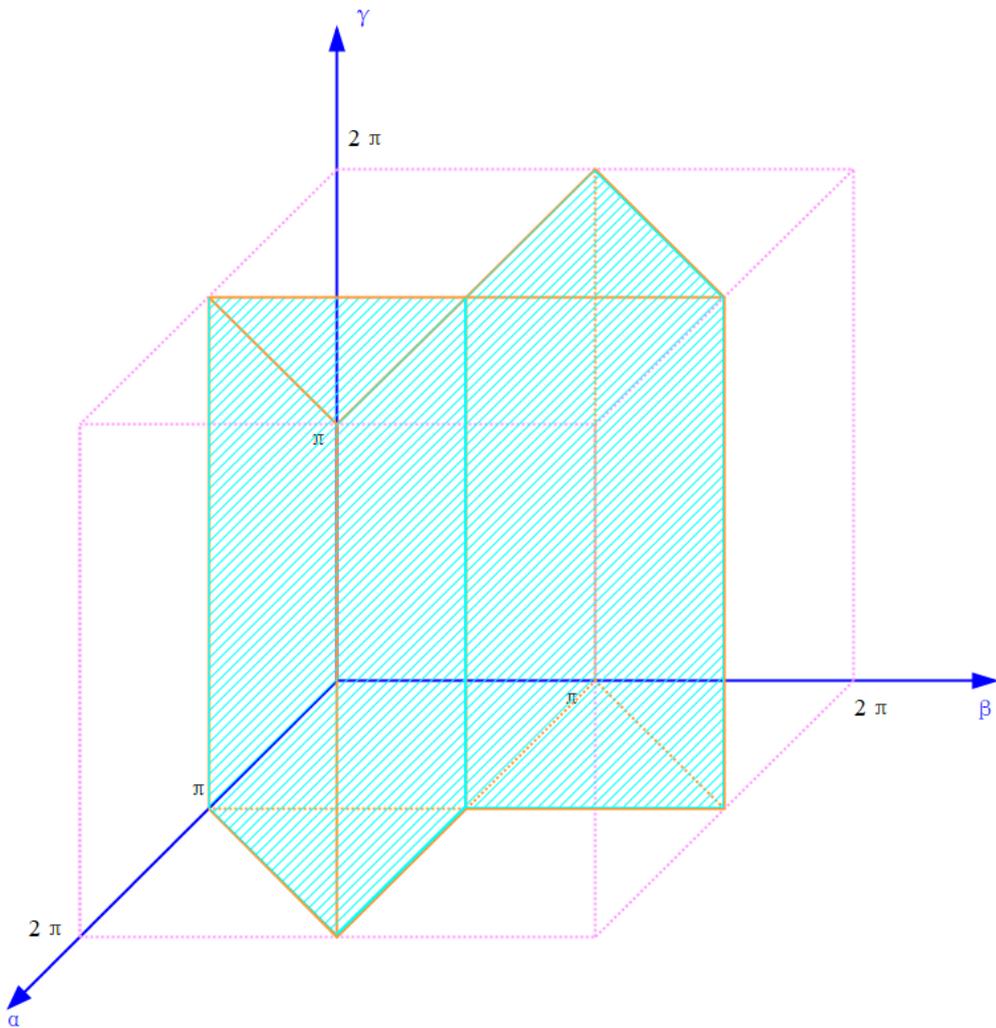
其实说复杂，也不复杂，毕竟都是在三只鸭子的基础上扩展的。曜酱，你想想，如果前三只鸭子间的位置关系如上图所示处于“禁区”的时候，那么第四只鸭子不管在哪，它们都不可能处于同一个半圆内，对吧？



当前三只鸭子不处于同一半圆内时，第四只鸭子无论在哪，它们都一定不处于同一半圆内

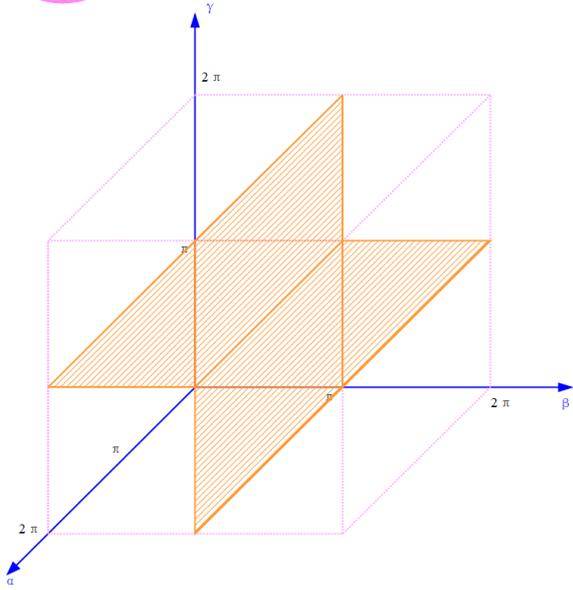


哦，这样的话，我们直接把上述二维几何概型的两个直角三角形变成三维空间中的两个三棱柱就好了吧！

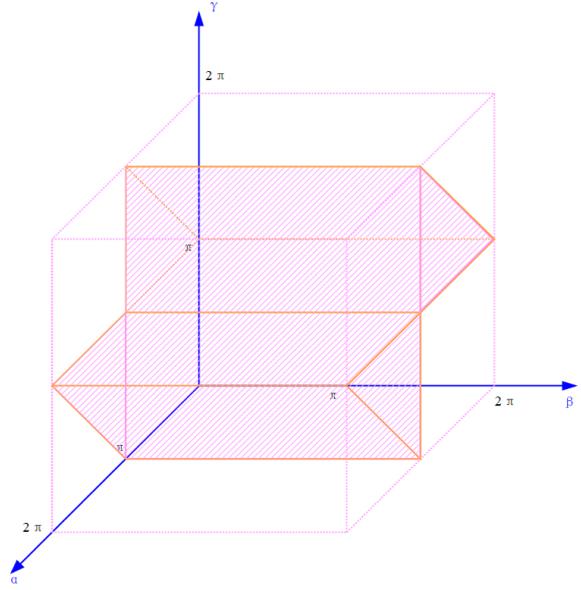




原来是这样啊！那么同理，当1、3、4三只鸭子不在同一半圆内时，第二只鸭子无论在哪里，它们也不会再同一个半圆内；当1、2、4三只鸭子不在同一半圆内时，第三只鸭子无论在哪里，它们亦不会在同一个半圆内。这样，就能把另外两对“禁区”三棱柱画出来了。



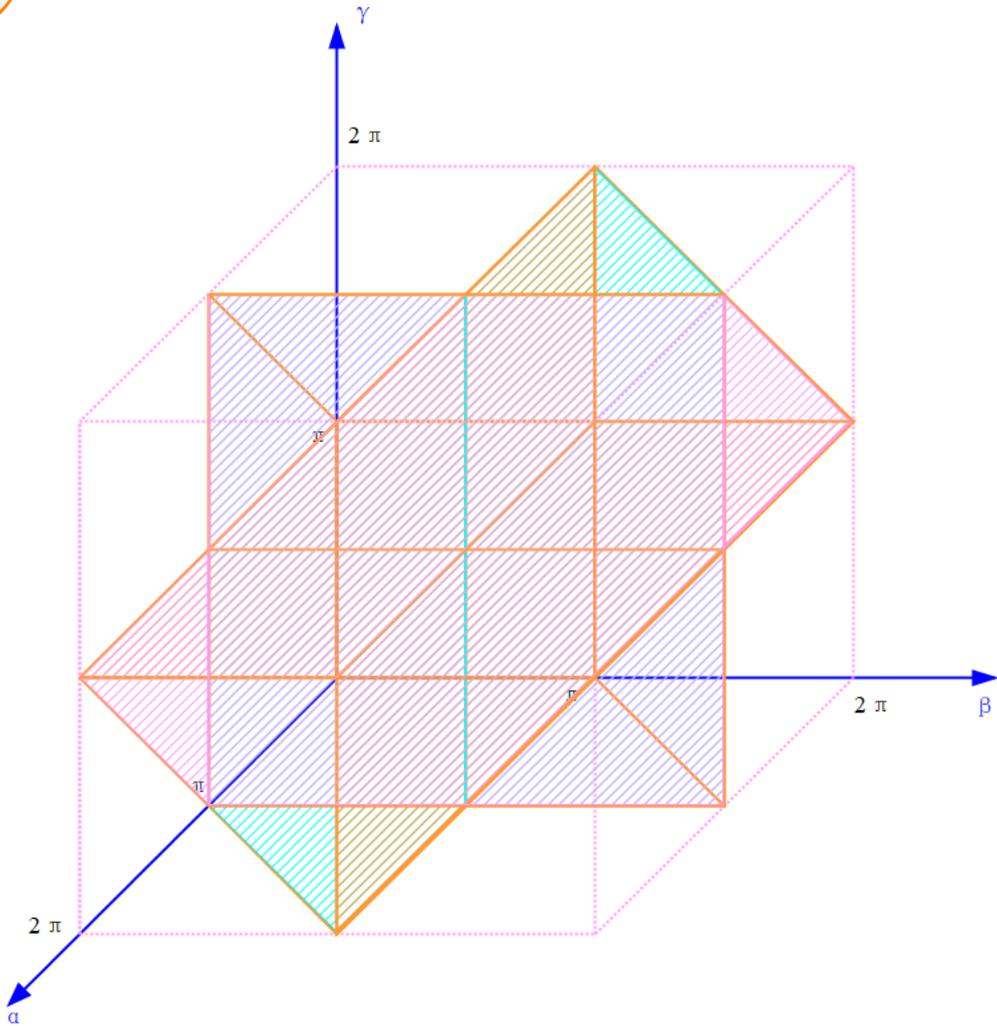
1、3、4三只鸭子不在同一半圆内时的情况



1、2、4三只鸭子不在同一半圆内时的情况



最后，把这三种情况综合起来，就是这样的了。

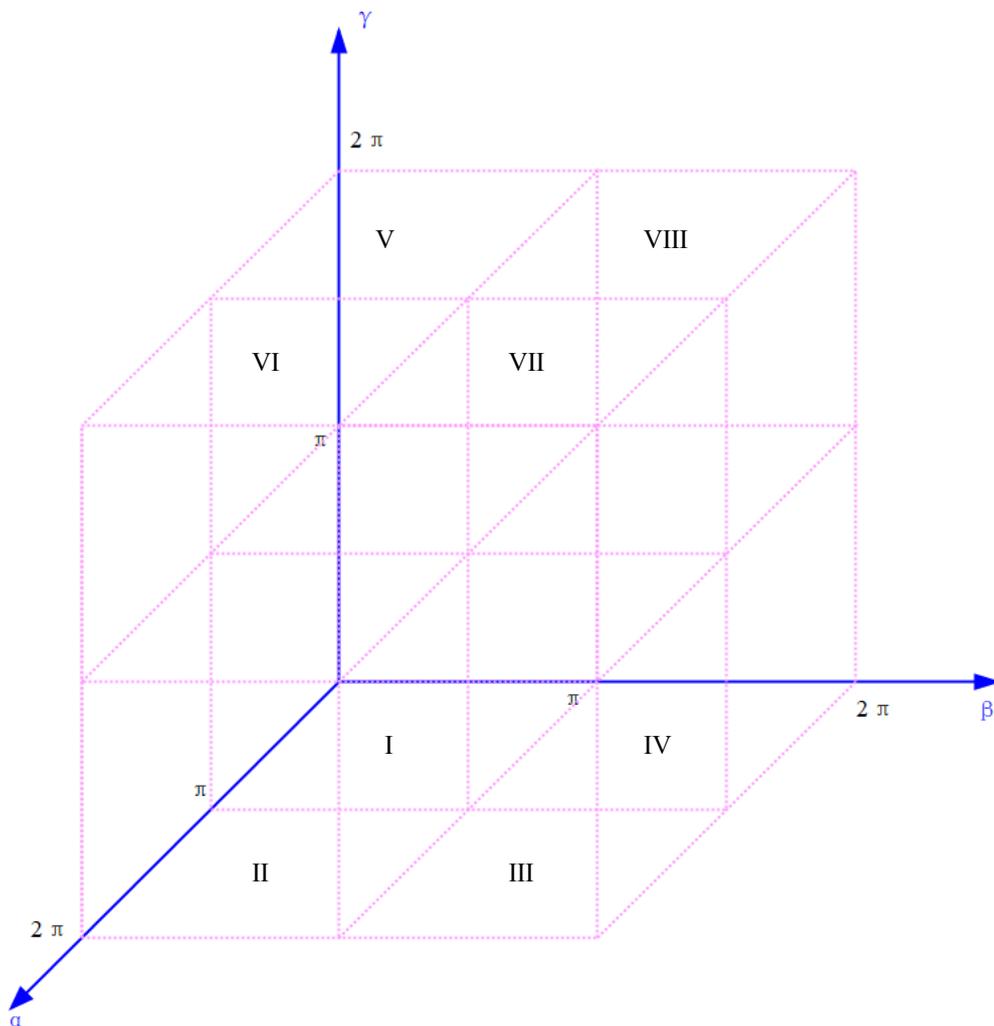




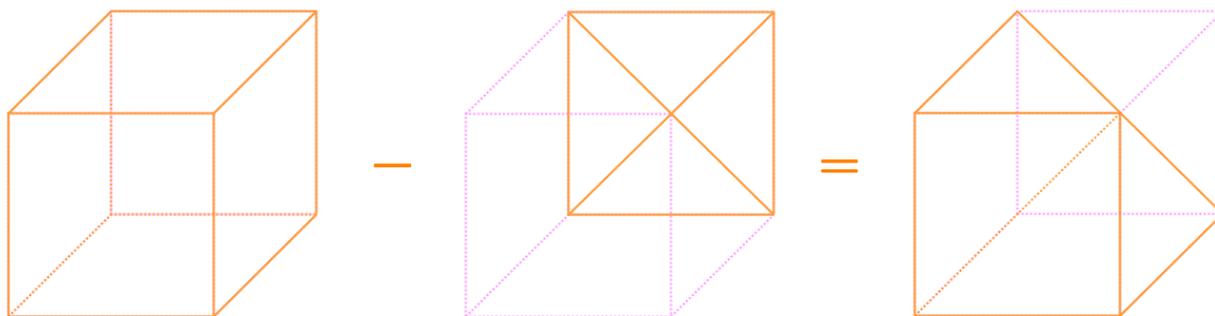
呜哇，这个几何体是什么样的，我看不清啊！



不过，根据前面三个分开画的图来看，应该想象得出来，如果把整个立方体的区域分成如图所示的8个小立方体的话，那么重叠之后的几何体，应该除了I、VII部分为空白之外，其余6个部分都是一个小立方体减去了一个同底同高的小四棱锥剩下的部分。



把整个立方体区域分成8个小立方体



除了I、VII部分为空白之外，其余6个部分都是一个小立方体减去了一个同底同高的小四棱锥剩下的部分



这样的话，结合着前面三个分开画的图，并把整个立方体分成8个小立方体来看的话，就容易理解得多了。这样，小立方体的体积是 π^3 ，同底同高的四棱锥的体积是 $\pi^3/3$ ，那么剩下的部分的体积就是 $2\pi^3/3$ 咯！一共6个这样的部分，所以这整个由三组三棱柱重叠起来的几何体的体积就是 $4\pi^3$ 了。



而整个立方体的体积是 $8\pi^3$ ，并且这个由三组三棱柱重叠起来的几何体代表的是四只鸭子不在同一个半圆内的情况，所以四只鸭子不在同一个半圆内的概率就是 $1/2$ ，那么四只鸭子在同一个半圆内的概率就也是 $1/2$ 了。果然姐姐酱的结果是对的，千歌酱，你真棒！



不过，如果是五只鸭子的话，还要再添一个维度的话，这就没法再继续这样画了吧！那样又该怎么办呢？



那么我们从这里面找下规律吧！当只有两只鸭子时，这个概率是100%，也就是 $2/2$ ；当有三只鸭子时，概率变成了 $3/4$ ；当有四只鸭子时，概率只有 $1/2$ ，也就是 $4/8$ 了。当我们把分子都调整到当前鸭子的数量时，分母有何变化规律，曜酱看出来了吗？



$2/2$ ， $3/4$ ， $4/8$ ，下一个应该就是 $5/16$ 了……也就是说，如果鸭子变成了五只，那么它们位于同一个半圆内的概率就只有 $5/16$ 了么？



是的哦！其实数学家们已经计算过了，当有 n 只鸭子时，它们处于同一个半圆内的概率是：

$$p = \frac{n}{2^{n-1}}$$

当然，他们具体是怎么计算的，我也不是太清楚，所以我们就用这个比较直观的二维、三维几何概型的图像来找其一般规律好了。



好的，谢谢你，千歌酱！露比这就去告诉姐姐酱，还有果南酱、鞠莉酱她们，叫她们不要吵了。